ΘΕΜΑ 1

Δίνεται ο πίνακας $A=\begin{pmatrix} \alpha & 2 & 1 \\ 1 & \beta & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$

α) Βρείτε τα α και β έτσι ώστε ο πίνακας A να έχει ιδιοτιμή το 3 με πολλαπλότητα 2 και να διαγωνοποιείται

β) Βρείτε το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα A

γ) Δείξτε ότι $A^{2013}-3^{19}A^{1994}=0_{3\times3}$, όπου $0_{3\times3}$: μηδενικός πίνακας

ΘΕΜΑ 2

α) Έστω $A\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ ένας αντιστρέψιμος πίνακας. Αποδείξτε ότι αν το λ είναι ιδιοτιμή του A, τότε $\lambda\neq0$ και το λ^{-1} είναι μια ιδιοτιμή του A^{-1}

β) Δείξτε ότι αν το 3 είναι ιδιοτιμή του πίνακα $A\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ τότε το 15 είναι ιδιοτιμή του πίνακα $2A^2-3I_n\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$

γ) Έστω $A\in M_{3\times3}(\mathbb{R})$ τέτοιος ώστε $A^2=4I$. Τι γνωρίζετε για το ελάχιστο πολυώνυμο του A και τι για το χαρακτηριστικό; Ο A διαγωνοποιείται;

ΘΕΜΑ 3

Στον Ευκλείδιο χώρο $\mathbb{R}_2[x]$, εφοδιασμένο με το εσωτερικό γινόμενο $\langle f,g\rangle=\int_0^1 f(t)g(t)\,dt$ δίνεται ο υποχώρος $V=\langle 1, x^2+x+1\rangle$. Βρείτε:

α) μια ορθοκανονική βάση του V.

β) Την προβολή του x^2-1 στον V και

γ) το ορθογώνιο συμπλήρωμα του V

ΘΕΜΑ 4

Στον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^3$ θεωρούμε την απεικόνιση $<,>' : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με τύπο

$<(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), (\beta_1, \beta_2, \beta_3)> = \alpha_1\beta_1 - \alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1 + \alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2 + 4\alpha_2\beta_2 + 2\alpha_3\beta_3$

α) Δείξτε ότι η προηγούμενη απεικόνιση ορίζει εσωτερ. γινόμενο στον $\mathbb{R}^3$

β) Να ορίσετε ισομετρία $T : (\mathbb{R}^3, <,>') \to (W, <,>)$, όπου το $<,>$ συμβολίζει το συνηθισμένο εσωτερ. γινόμενο στον $\mathbb{R}^4$ και W είναι ο υποχώρος $\{(x,y,z,w) \mid x - y - 2z + w = 0\}$ του $\mathbb{R}^4$

ΘΕΜΑ 5

Για ποιες τιμές ο πίνακας

$$A(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \\ 1 & 1 & t \end{pmatrix} \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$$

είναι θετικά ορισμένος;

Θεωρούμε την τετραγωνική μορφή $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με τύπο

$q(x,y,z) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$

α) Να αναχθεί η τετραγωνική μορφή q στους κύριους άξονές της, οι οποίοι και να βρεθούν

β) Να προσδιοριστεί το είδος της επιφάνειας η οποία ορίζεται απ' την εξίσωση: $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = 1$

γ) Να βρεθεί συμμετρικός και αντιστρέψιμος πίνακας B έτσι ώστε $B^2 = A$